Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

24-3 | 2020
Lectures et postérités de *La Philosophie de l'algèbre* de Jules Vuillemin

Jules Vuillemin : de la méthode cartésienne à la méthode structurale

Jules Vuillemin : From the Cartesian Method to the Structural Method

Sébastien Maronne

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2527
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.2527
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 25 octobre 2020
Pagination : 71-99
ISBN : 978-2-84174-
ISSN : 1281-2463

Référence électronique
Sébastien Maronne, « Jules Vuillemin : de la méthode cartésienne à la méthode structurale », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 24-3 | 2020, mis en ligne le 01 janvier 2021, consulté le 31 mars 2021. URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2527 ; DOI : https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.2527

Jules Vuillemin : de la méthode cartésienne à la méthode structurale

Sébastien Maronne
Institut de Mathématiques de Toulouse,
Université Paul Sabatier, Toulouse (France)

Résumé : J'étudie la méthode structurale définie par Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre* ainsi que les origines de cette méthode en partant de la quatrième règle du *Discours de la méthode* et de l'interprétation qu'en donne Vuillemin dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. J'analyse pour ce faire la conception de Vuillemin de l'histoire des mathématiques ainsi que les relations entre méthode et objets. J'examine d'autre part les différentes formes d'analyse et d'abstraction mentionnées par Vuillemin et leur rapport à la thématisation au sens de Cavaillès.

Abstract: I studied the structural method defined by Vuillemin in *La Philosophie de l'algèbre* and the origins of this method by considering the fourth rule of the Discours de la méthode and its interpretation given by Vuillemin in *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*. To achieve this aim, I analyse Vuillemin's conception of the history of mathematics and the relationship between method and objects. I also examine the different forms of analysis and abstraction mentioned by Vuillemin and their relationship with Cavaillès' thematization.

1 Introduction

1.1 Pourquoi Descartes ?

La figure de Descartes, philosophe et mathématicien, traverse l'œuvre de Jules Vuillemin, comme celle de plusieurs philosophes français des sciences de

Philosophia Scientiæ, 24(3), 2020, 71–99.

la seconde moitié du XX^e^ siècle [1], depuis *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* (1960), dont la conclusion annonce *La Philosophie de l'algèbre* (1962) publiée deux ans plus tard, jusqu'aux synthèses visant à proposer une classification de systèmes philosophiques, offertes dans le volume paru chez Minuit, *Nécessité ou contingence* (1984), puis dans son complément *What Are Philosophical Systems* (1986). Pourquoi Descartes ? Si on laisse de côté l'empreinte cartésienne dans la formation et les débats philosophiques de cette période [2] pour se concentrer sur les textes de Descartes et les commentaires qu'en donne Vuillemin, en les rapportant à l'ensemble de l'œuvre de ce dernier [3], on identifie deux faisceaux de raisons qui conduisent Vuillemin à privilégier l'exemple cartésien comme point de départ de son projet d'une philosophie de l'algèbre [4].

Le premier tient à la relation bien connue chez Descartes entre mathématiques et métaphysique. Le conditionnement diachronique de la philosophie théorique par les mathématiques pures [5], pour ce qui regarde le renouvellement des méthodes de celle-là dans le traitement du problème de la connaissance, attesté selon Vuillemin par l'histoire des deux disciplines, est le postulat de départ de *La Philosophie de l'algèbre*. Comme « il est également connu que la méthode métaphysique de Descartes emprunte sans discontinuer à l'invention de la Géométrie Algébrique » [Vuillemin 1962, 4–5] [6], on n'est guère étonné que Vuillemin ait pu partir de l'exemple prototypique de Descartes, d'autant que celui-ci revendique explicitement l'analogie de *méthode* voulue par celui-là, entre mathématiques et métaphysique, dans le *Discours de la méthode* [Descartes 1637, 19].

Le second faisceau de raisons tient à la lecture originale de la quatrième règle du *Discours de la méthode* comme un précepte régulateur portant sur les *méthodes* d'investigation d'un problème, plutôt que sur ses composantes, qui préfigure l'un des ingrédients de la méthode structurale définie dans

1. Granger traite dans son *Essai d'une philosophie du style* du style cartésien [Granger 1968, 43–55]. La première communication scientifique de Canguilhem, prononcée à l'occasion du congrès Descartes de 1937, a pour titre « Descartes et la technique » [Canguilhem 2011-, I, 490–498] : sur ce « texte pivot », voir [Roth 2013, 195–206]. Pour une étude consacrée à la figure de Descartes dans l'œuvre de Canguilhem, on pourra aussi consulter [Guillin 2015].

2. À ce sujet, voir [Van Damme 2002, chap. IV, 179–234].

3. Je m'inscris ici dans la ligne de [Schwartz 2015].

4. De l'aveu de Vuillemin lui-même : voir la conclusion de *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* [Vuillemin 1960*b*, 141, en part. IV].

5. Sur la définition de la philosophie théorique donnée par Vuillemin, cf. [Vuillemin 1962, 2–4]. Les mathématiques pures recouvrent l'algèbre, la géométrie et l'analyse, mais aussi la théorie des ensembles et la topologie. Il est notable que Vuillemin choisisse d'y incorporer également la logique formelle ou mathématique, celles-là étant prises « au sens large ». Cf. [Vuillemin 1962, 2].

6. C'est précisément ce que s'est efforcé de montrer Vuillemin dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* deux ans plus tôt. Il écrit ainsi dans son avant-propos qu'il « [espère] éclairer par Descartes savant Descartes philosophe » [Vuillemin 1960*b*, 2].

La Philosophie de l'algèbre, *a contrario* de la méthode génétique dont Descartes fait usage.

1.2 Quelle histoire des mathématiques ?

On observe dans les ouvrages de Vuillemin de nombreuses marques de l'attention minutieuse portée par lui au contenu mathématique des textes [7], qu'il s'agisse des nombreuses notes mathématiques « techniques » reléguées en appendice, ou bien des analyses détaillées des raisonnements mathématiques procurées dans le développement de l'argumentation philosophique, cf. [Vuillemin 1960*b*, 142–183] et [Vuillemin 1962, *passim*].

Une histoire récurrente des mathématiques instrumentalisée par la métaphysique

Si Vuillemin peut proposer l'éclairage d'un texte mathématique ancien au moyen des mathématiques contemporaines, à l'instar de Bourbaki [8], les choix qu'il opère obéissent à des raisons mathématiques mais également métaphysiques, comme en témoigne, de manière particulièrement saisissante, l'« éclaircissement » apporté sur la définition cartésienne de la tangente dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* :

> À vrai dire, la définition cartésienne [de la tangente] ne s'éclaircit entièrement que si l'on en appelle à la définition algébrique formelle de la dérivée d'un polynôme [9]. Soit le polynôme $A(x)$ appartenant à l'anneau $K[x]$. Formons le polynôme $A(x + y)$ appartenant à l'anneau $K[x, y]$, où y est l'indéterminée. Le point

7. Cette démarche s'est appuyée sur un apprentissage des mathématiques conduit en particulier auprès de Pierre Samuel, qui fut professeur au même moment que Vuillemin à l'université de Clermont-Ferrand. Pierre Samuel apparaît dans les remerciements de [Vuillemin 1960*b*] et comme l'un des dédicataires de [Vuillemin 1962]. Vuillemin écrit d'ailleurs dans « Ma vie en bref » : « Under the direction of Pierre Samuel, who taught in the science faculty, I deepened my mathematical knowledge a little » [Vuillemin 1991, 3]. Sur Samuel et Vuillemin, cf. [Maronne 2014].

8. Vuillemin s'est appuyé pour l'histoire de la théorie des équations algébriques sur la notice historique publiée dans [Bourbaki 1950, 199–201] : voir [Vuillemin 1962, n. 1, 74]. Il cite également en bibliographie les *Éléments d'histoire des mathématiques* [Bourbaki 1960].

9. On retrouve une analyse semblable chez André Weil à propos de la controverse sur les tangentes entre Descartes et Fermat. Celle-ci est condamnée à nous apparaître sybilline tant qu'on n'a pas clarifié la distinction entre géométrie algébrique et géométrie différentielle [Weil 1980, 234]. Dans le même ordre d'idées, cf. [Weil 1981, 395] sur les origines de la géométrie algébrique.

de vue de Fermat et de Cournot consiste à écrire ces polynômes :

$$A(x) = \sum a_K x^K = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$
$$A(x+y) = \sum a_K (x+y)^K = A(x) + yA_1(x) + y^2 A_2(x) + \ldots$$

puis à les soustraire en négligeant les termes en y^2, y^3, etc. :

$$A(x+y) - A(x) = yA_1(x)$$

C'est cette définition que refuse Descartes, car elle ne repose que sur une pseudo-égalité. Pour que $y^2 \ldots$ ne soit plus seulement négligeable, mais rigoureusement nulle, il suffit de considérer les congruences modulo y^2, c'est-à-dire l'anneau quotient $K[x][y]/y^2$.

Bien que cette idée des congruences soit étrangère aux Mathématiques de Descartes, une telle définition formelle et purement algébrique est bien dans l'esprit de la *Géométrie*. Il est vrai qu'elle contredit à la représentation géométrique de la tangente comme limite d'une sécante, mais l'idée-mère de la Géométrie analytique, c'est-à-dire la conception d'une correspondance fonctionnelle entre une équation et une courbe est secondaire, chez Descartes, par rapport à la théorie purement algébrique des proportions. [Vuillemin 1960*b*, 63–64]

Ce conditionnement des mathématiques par la métaphysique s'applique non seulement à l'interprète mais également aux acteurs. De nature à la fois théorique et pratique, il affecte les choix effectués par Descartes parmi les méthodes et les objets recevables en géométrie. En effet, force est de constater que la Géométrie cartésienne outrepasse *La Géométrie* [Descartes 1637a]. Descartes emploie ainsi dans ses lettres des méthodes infinitistes pour résoudre des problèmes faisant intervenir des courbes « mécaniques [10] », méthodes et objets qu'il avait auparavant exclus. La conclusion qu'en tire Vuillemin est que la raison d'un tel ostracisme n'est pas technique mais métaphysique [Vuillemin 1960*b*, 9–10]. Ce conditionnement métaphysique permet en outre d'expliquer l'absence d'une physique mathématique chez Descartes car les problèmes de la physique ne conduisent que rarement à des équations algébriques [Vuillemin 1960*b*, 93–95]. Dans les remarques de conclusion de *What Are Philosophical Systems*, Vuillemin écrira de manière suggestive à propos de l'exemple cartésien : « c'est bien une *action philosophique* plutôt qu'une défaillance technique qui est responsable du divorce entre le programme de Descartes et son accomplissement » [Vuillemin 1986, 130].

Dans *La Philosophie de l'algèbre*, Vuillemin amplifiera cette thèse et caractérisera la science, et donc la connaissance mathématique, en posant

10. Cf. [Vuillemin 1962, 56–73]. Les courbes mécaniques, qui ne peuvent pas être exprimées par une équation algébrique entre leurs coordonnées, sont exclues de *La Géométrie*. Sur la classification cartésienne des courbes, voir [Vuillemin 1960*b*, 77–98].

« qu'elle est de part en part métaphysique, en ce qu'elle implique à son principe des décisions et des choix qui n'appartiennent pas eux-mêmes à la juridiction intérieure de cette connaissance » [Vuillemin 1962, 505].

En considérant le témoignage autobiographique de « Ma vie en bref », dans lequel Vuillemin se démarque de la philosophie analytique anglo-saxonne, on doit ajouter que l'histoire de Vuillemin « qui n'est pas une histoire » n'est toutefois pas une logique car elle est fondée sur le commentaire et l'interprétation des textes mathématiques et philosophiques et apparaît assujettie à une contrainte de fidélité :

> [...] Even those who applied the method of "rational reconstruction" to [scientific languages] more often imposed on them principles of their own choice. I resisted this violence done to history, and trusted in the sciences such as they are, and not such as they should be. Moreover, it is presumptuous to neglect the philosophical tradition. [Vuillemin 1991, 4]

J'examinerai dans les sections suivantes les raisons mathématiques et philosophiques au fondement de l'histoire *structurale* des mathématiques proposée par Vuillemin [11].

1.3 La quatrième règle du *Discours de la méthode*

Dans le paragraphe précédant la conclusion de *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* [Vuillemin 1960*b*, § 18, 135–138], Vuillemin propose une interprétation originale de la quatrième règle du *Discours de la méthode* [Descartes 1637, 19] en voyant celle-ci comme « un précepte réflexif et régulateur, qui porte donc sur les méthodes et non sur les problèmes » et en la rapprochant du passage suivant tiré du Livre III de la *Géométrie* [12] :

> Il est vray que ie n'ay pas encore dit sur quelles raisons ie me fonde, pour oser ainsi assurer si une chose est possible ou ne l'est pas. Mais, si on prent garde comment, par la méthode dont ie me

11. Cette histoire structurale des mathématiques s'articule en outre avec une histoire structurale de la philosophie dans la ligne de Gueroult. Sur ce point, voir en particulier [Vuillemin 1963, V–VIII, 17–30]. Sur l'histoire structurale de la philosophie pratiquée par Gueroult et Vuillemin, cf. [Mélès à paraître].

12. Le fait que l'usage des préceptes de la méthode ait *effectivement* régi l'élaboration mathématique de *La Géométrie* a souvent été mis en doute au sein de l'historiographie, pour la simple raison que ces préceptes sont relativement généraux. Les *Regulae* ont pu aussi être convoquées comme complément philosophique à la *Géométrie* mais le problème est autre : les mathématiques auxquelles elles renvoient, exception faite des règles XIX à XXI, dont on n'a que les titres, ne correspondent pas à celles de la *Géométrie*. Sur ces questions, cf. [Israel 1998]. L'introduction du « repère cartésien » dans la résolution du problème de Pappus « pour [se] demesler de la confusion de toutes ces lignes » [Descartes 1637a, 382–383] offre une illustration remarquable du second précepte. L'interprétation de Vuillemin n'en a que plus d'intérêt.

> sers, tout ce qui tombe sous la consideration des Géomètres se reduist a un mesme genre de Problesmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation, on iugera bien qu'il n'est pas malaysé de faire un dénombrement de toutes les voyes par lesquelles on les peut trouver, qui soit suffisant pour demonstrer qu'on a choisi la plus générale & la plus simple. [Descartes 1637a, 475]

Descartes a auparavant présenté sa « règle générale » de construction des problèmes solides, partant d'une équation du troisième ou du quatrième degré, au moyen d'un cercle et d'une parabole. Il a ensuite appliqué cette règle à l'invention de deux moyennes proportionnelles et à la trisection de l'angle avant d'affirmer *a contrario* que tous les problèmes solides se réduisent à ces deux constructions sur la base d'un examen exhaustif des trois types d'équations du troisième degré [13]. En effet, Descartes a introduit une équation (résolvante) « auxiliaire et indirecte » du troisième degré [Descartes 1637a, 457–461] lui permettant de réduire les équations du quatrième degré à celles du second, et donc de ne considérer, *in fine*, que le cas des équations du troisième degré. Vuillemin commente :

> Toute l'histoire ultérieure de la théorie des équations consistera [...] à faire l'examen critique des méthodes de résolution [...] [et] montrera l'utilité de la dernière règle cartésienne, sorte de méthode de la méthode même, tout en signalant son usage imparfait. [...] l'algébriste n'établira sa règle d'énumération méthodique que sur l'analyse d'équations auxiliaires et indirectes, qui résulteront de la comparaison des méthodes, ou même qu'il aura à construire *a priori* pour résoudre des classes définies d'équations.
>
> Ainsi la quatrième règle se détachera du corps des règles du *Discours*, celui-ci servant à déterminer directement les objets et les équations, celle-là servant à déterminer indirectement les structures et les méthodes. [Vuillemin 1960*b*, 137–138]

Les vertus de l'emploi de la quatrième règle du *Discours* se rencontrent donc dans l'usage d'une analyse *indirecte* et l'examen *critique* des méthodes de résolution, lesquels préfigurent certaines des composantes de la méthode structurale qui sera définie par Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre* [14].

13. [Descartes 1637a, 464–475]. Descartes par un procédé rhétorique dont il est coutumier renverse une fois de plus la perspective. Les deux problèmes de l'insertion de deux moyennes proportionnelles et de la trisection de l'angle ne sont donc pas seulement d'illustres exemples transmis par les Grecs à la postérité et donc marqués du sceau de la contingence historique : ils sont aussi les premiers dans l'ordre des raisons.

14. Cf. [Vuillemin 1962, 465–466]. Vuillemin insiste à nouveau sur le caractère précurseur de la quatrième règle du *Discours* dans [Vuillemin 1962, 65, 216].

La méthode génétique et ses limites

Cet emploi de la quatrième règle est néanmoins entravé par la méthode génétique et l'intuitionnisme « intrinsèque » à l'œuvre dans la géométrie cartésienne : c'est ce que nous enseigne *La Philosophie de l'algèbre* qui évoque celui-ci [15] et caractérise celle-là, chez Lagrange et Fichte [Vuillemin 1962, 112–122], répondant ainsi aux deux dernières questions posées par Vuillemin dans *Mathématiques et métaphysique chez Descartes* :

> Quelles sont les limites que rencontre la méthode génétique ? Quelles structures méthodiques les lui imposent ? [Vuillemin 1960*b*, 141]

Vuillemin définit de manière parfaitement claire, dans la conclusion d'une première version de *La Philosophie de l'algèbre* [16], l'idéal méthodique génétique qu'on aperçoit chez les mathématiciens du XVII^{e} et du XVIII^{e}, malgré les débats et les querelles portant sur l'analyse et la synthèse :

> Étant donné un individu complexe, il faut pouvoir le décomposer en ses éléments, puis le recomposer entièrement à partir de cette analyse élémentaire. Tel est le double mouvement de la « méthode génétique ». Son défaut tient uniquement à ce que la particularité du point de départ cache, la plupart du temps, les raisons du succès ou de l'échec de l'analyse. L'entendement ne réussit que par une divination heureuse, ce qui donne lieu à la théorie du génie. [Vuillemin 1962a, 358]

On sait que Descartes considérait deux problèmes comme impossibles *géométriquement* : la quadrature du cercle et la rectification des courbes géométriques. Le premier de ces problèmes ne peut être construit que « mécaniquement » avec la quadratrice : c'est ce qui permet à Descartes d'exclure une

15. Cf. [Vuillemin 1962, 171–173]. L'intuitionnisme à l'œuvre chez Descartes est intrinsèque car les critères qu'il emploie pour restreindre l'usage de la raison sont internes aux mathématiques (« [procéder] par égalités absolues et [rejeter] les égalités de Fermat »), et ne font pas appel à une faculté extérieure. *A contrario*, l'intuitionnisme de Kant est « extrinsèque ». L'intuitionnisme, mathématique et philosophique, chez Descartes, ainsi que chez Kant, sera abordé dans le détail dans [Vuillemin 1984, 208–230]. Sur l'intuitionnisme cartésien, voir aussi [Belaval 1960].

16. Nous désignerons dans la suite cette première version sous le vocable de « *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* ». On trouve dans la boîte V du fonds Vuillemin trois documents dactylographiés A, B et C, comportant de nombreuses corrections et annotations manuscrites, qui composent la deuxième partie de cette première version. Celle-ci contenait deux parties. La première partie, aujourd'hui disparue, a constitué le matériau de *La Philosophie de l'algèbre*. Une deuxième partie, inédite, qu'on trouve dans le document A, [Vuillemin 1962a], fut remaniée après la publication du premier tome : les deux premiers chapitres furent réécrits (c'est le document B, cf. [Vuillemin 1962b]), des pages furent ajoutées, et de nombreuses corrections manuscrites furent apportées. Pour une présentation détaillée, cf. dans le présent dossier la contribution de Baptiste Mélès ainsi que la notice de Gudrun Vuillemin-Diem dans le dossier documentaire consacré au tome II de *La Philosophie de l'algèbre*.

telle solution dans le cadre de son intuitionnisme « intrinsèque » fondé sur le critère du clair et du distinct, cf. [Vuillemin 1960*b*, 90–93] et [Vuillemin 1962, n. 3, 184–185]. Néanmoins, rien n'assure qu'on ne puisse pas disposer d'une construction alternative légitime géométriquement : c'est tout le problème des démonstrations d'impossibilité dans le cadre d'une méthode génétique [17]. En revanche, l'intuition exprimée par Descartes dans *La Géométrie* selon laquelle « la proportion qui est entre les droites & les courbes n'estant connüe & mesme, ie croy, ne le pouvant estre par les hommes » [Descartes 1637a, 412] fut contredite assez rapidement par la rectification donnée par van Heuraet de courbes algébriques qu'on trouve, ironie du sort, dans le premier volume de la seconde édition latine de la *Géométrie* de van Schooten parue en 1659.

Cette confirmation et ce démenti établissent que l'intuitionnisme joint à la méthode génétique participent non seulement de l'imperfection mais aussi de l'incertitude de la géométrie cartésienne. Comme l'écrira Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre*, « les prétentions [génétiques] sont démenties par l'apparition de bornes qui surgissent irrationnellement de la marche même de l'entendement » [Vuillemin 1962, 115].

2 Vers la méthode structurale

2.1 Méthode cartésienne et méthode structurale

C'est en partant de cet « usage imparfait » cartésien de la quatrième règle pour construire les problèmes solides que Vuillemin va opérer la reconstruction d'une histoire nécessaire de la théorie des équations algébriques, dans la première section de la première partie de *La Philosophie de l'algèbre* intitulée « Les règles de la méthode » [Vuillemin 1962, 69–300]. Le titre n'est pas anodin [18] : chacun des quatre chapitres composant cette section, respectivement consacrés au théorème de Lagrange, au théorème de Gauss, à la méthode générale d'Abel, et à la théorie de Galois, « exprime » un des quatre préceptes de la méthode des mathématiques modernes, lesquels sont présentés bien plus loin au sein de la conclusion de *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962, § 49, 466–472] dans une section au titre éminemment cartésien « Règles pour la direction de l'esprit ». Non contents de renvoyer à quatre auteurs, ces

17. Comme on le sait bien, l'exclusion cartésienne est confirmée par la démonstration, bien ultérieure, de la transcendance de π.

18. Vuillemin n'explique pourtant, à aucun moment, la signification de ce titre et la correspondance mise en évidence *infra*. Dans le § 7 de l'Introduction, où il présente le plan du livre, il se contente d'écrire que dans la première partie, « [il] étudie d'abord l'avènement de la méthode *de Galois* et examine *quelles règles ou quels préceptes l'expriment* » [Vuillemin 1962, 66]. En conclusion, il écrit : « Les théories de Lagrange, de Gauss, d'Abel et de Galois concernant la question des équations n'ont servi qu'à expliquer *respectivement* le sens des quatre préceptes suivants » [Vuillemin 1962, 466].

quatre préceptes font donc clairement écho aux quatre préceptes cartésiens du *Discours de la méthode*.

On trouve déjà exprimée dans le célèbre texte de Bourbaki, « L'architecture des mathématiques », une analogie formelle entre la méthode cartésienne et la méthode (structurale) axiomatique, fondée en particulier sur le « classique balancement de l'analyse et de la synthèse » :

> Puisant comme [la méthode expérimentale] à la source cartésienne, [la méthode axiomatique] « divisera les difficultés pour les mieux résoudre » ; dans les démonstrations d'une théorie, elle cherchera à dissocier les ressorts principaux des raisonnements qui y figurent ; puis, prenant chacun d'eux isolément, et le posant en principe abstrait, elle déroulera les conséquences qui lui sont propres ; enfin, revenant à la théorie étudiée, elle en combinera de nouveau les éléments constitutifs précédemment dégagés, et étudiera comment ils réagissent les uns sur les autres. Il n'y a, bien entendu, rien de neuf dans ce classique balancement de l'analyse et de la synthèse ; toute l'originalité de la méthode réside dans la manière dont elle est appliquée. [Bourbaki 1948, 38]

Comme on le sait bien, Bourbaki présente en outre dans ce texte sa théorie des structures. S'agit-il du point de départ de Vuillemin dans sa réflexion sur la méthode des mathématiques [19] ?

Alors que les trois premiers préceptes de la méthode cartésienne régissent les mathématiques classiques du XVIIe et du XVIIIe siècles [20], les préceptes de la méthode structurale sont repérés par Vuillemin au sein des mathématiques du XIXe, bien que les structures en soient absentes, à travers les interprétations structurales, modernes, qui en sont données [21]. Vuillemin indique en effet dans l'introduction avoir partagé *La Philosophie de l'algèbre* en deux parties, « suivant qu'il s'agissait des méthodes proprement dites [le tome I, publié, de *La Philosophie de l'algèbre*] ou, au contraire, des objets et des idées

19. L'article de Bourbaki figure dans les références de [Vuillemin 1962] mais n'est pas cité.

20. Selon Vuillemin, avant Lagrange, les géomètres du XVIIIe siècle mésusent des trois premières règles de la méthode cartésienne en confondant les natures simples et les courbes particulières, la méthode et l'invention, et en n'assujettissant pas véritablement l'usage de la méthode à la raison, laquelle devrait rendre compte, en particulier, des échecs et des réussites dans la résolution des problèmes. Lagrange, en réintroduisant l'usage de la quatrième règle, va enclencher le passage de la méthode génétique cartésienne à la méthode structurale. Cf. [Vuillemin 1962, 61–65 ; 73].

21. Vuillemin s'appuie ainsi sur l'exposé moderne de la théorie de Galois qu'on retrouve, si l'on s'en tient aux références citées par Vuillemin [Vuillemin 1962, 240], dans [Bourbaki 1950, chap. V, 70–191]. Connaissant les relations qui lient Vuillemin et Samuel, il n'est pas anodin que Samuel soit l'auteur de la pénultième version de ce chapitre : cf. [Samuel 1948b]. Une autre source de Vuillemin est le traité classique [van der Waerden 1950, I, chap. VII, 153–192].

nouvelles que leur application a permis d'apercevoir – [le tome II, *non publié*] » [Vuillemin 1962, 65–66] [22].

Cette reconstruction est donc également, pour ainsi dire, combinatoire, en tant qu'elle est déterminée par une contrainte forte : identifier parmi les développements mathématiques du XIX[e] siècle consacrés à la théorie des équations quatre préceptes « miroirs » de ceux de la méthode cartésienne [23], dont la forme reproduit, qui plus est, très fidèlement celle des énoncés cartésiens en dépit de la divergence sur le fond [24].

Cette histoire nécessaire et récurrente, fondée sur le plan à la fois mathématique et philosophique, est parfaitement assumée par Vuillemin. Il s'agit bien de « réflexions » sur le développement de la théorie des équations algébriques que Vuillemin propose, qui n'en sont pas moins fondées sur « les mathématiques telles qu'elles sont » (voir *supra*, section 1.2, p. 75).

2.2 Les préceptes de la méthode structurale

Dans l'interprétation de Vuillemin, les trois premiers préceptes de la méthode cartésienne renvoient respectivement à l'intuition des natures simples (proportions et équations) [Vuillemin 1962, 16], l'analyse, la synthèse, ces deux dernières opérations à l'œuvre dans la résolution d'un problème géométrique étant parfaitement réversibles l'une dans l'autre [Vuillemin 1962, 5–28, 468], tandis que le quatrième précepte régule l'usage des trois premiers.

Qu'en est-il de la méthode exposée par Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre* ? Cette méthode est celle de la mathématique moderne formelle [25]. Elle est donc *structurale* [26]. Ses quatre préceptes incorporent, en écho à

22. Vuillemin renvoie ainsi au tome II pour l'analyse des structures qui « affleurent » dans l'œuvre de Gauss [Vuillemin 1962, 149]. Cf. [Vuillemin 1962a, chap. VI et VIII].

23. Faute d'espace, je ne peux malheureusement pas discuter ici le choix des textes et des auteurs opérés par Vuillemin. Sans entrer dans les détails, il me paraît toutefois clair que Vuillemin s'est appuyé sur l'histoire donnée par Bourbaki dans [Bourbaki 1950, Notice historique, 199–205] qu'il cite comme on l'a vu auparavant dans la note 8, p. 73.

24. Comparer par exemple « le premier est de ne recevoir une solution pour satisfaisante... » à « le premier estoit de ne recevoir jamais aucune chose pour vraye ». On notera également en passant l'usage ironique du vocabulaire cartésien dans le commentaire au premier précepte : « c'est en effet une *prévention* ou du moins une *précipitation* de croire qu'au fur et à mesure qu'on augmente le degré d'une équation algébrique, on augmente seulement la complication des expressions algébriques qui seront ses solutions, car l'existence de solutions algébriques dépend elle-même de structures abstraites, celles des groupes de substitutions qui n'ont pas de rapport immédiat avec la théorie des équations » [Vuillemin 1962, 467].

25. Vuillemin oppose la mathématique formelle critique des Modernes à la mathématique « matérielle » dogmatique des Classiques : cf. [Vuillemin 1962, 471–472]. La première porte sur les structures tandis que la seconde porte sur les individus.

26. Vuillemin n'emploie pourtant que deux fois l'expression « méthode structurale » dans *La Philosophie de l'algèbre* bien qu'une telle désignation aille de soi.

Descartes, des opérations, comme l'analyse et la synthèse, qui sont déterminées par les structures sous-jacentes aux problèmes et leur usage répond à des normes épistémologiques, comme l'explication ou la pureté.

Ceci ressort des commentaires de Vuillemin, qui suivent immédiatement l'exposé des préceptes [Vuillemin 1962, 467–472], et dont la structure est invariablement la même : Vuillemin opère une comparaison avec Descartes et rappelle les leçons à tirer des chapitres correspondants [27].

Le premier précepte détermine les conditions pour recevoir « une solution pour satisfaisante » plutôt qu'une « chose pour vraie », comme c'était le cas chez Descartes. Ce précepte impose donc l'usage d'une analyse (second précepte) qui « montre la raison ou la cause [28] dans une structure définie ». Or les structures, en tant qu'elles sont définies par un système d'axiomes, ne sont ni simples, ni soumises au critère cartésien d'évidence, que ce soit globalement ou à travers leurs axiomes. D'autre part, les structures appartiennent à un ordre rationnel et formel entièrement séparé de celui, concret, des individus auxquels elles s'appliquent. Vuillemin en tire trois conséquences qu'il va dérouler tout au long de ses commentaires des préceptes [29], et qui caractérisent la méthode des mathématiques modernes par opposition à celle, génétique, des mathématiques classiques.

Cf. [Vuillemin 1962, 273] ainsi que [Vuillemin 1962, 114] où la méthode structurale est illustrée par la troisième série dans les deux systèmes de Lagrange et Fichte, *a contrario* de la méthode génétique, illustrée par les deux premières séries. On retrouve la même expression dans [Vuillemin 1960*a*, 20]. Cf. également [Vuillemin 1962a, chap. IX, 268e ; conclusion, 358, 361]. Vuillemin affirme dans cette conclusion que la méthode structurale est « critique » (p. 361) et « doit être axiomatique » (p. 358).

27. Bien que Vuillemin affirme que de tels préceptes sont « assez clairs par les exemples qui les ont illustrés » [Vuillemin 1962, 466], on ne peut bien comprendre les commentaires qui suivent qui si l'on a bien en tête les chapitres en question. Le fait que les préceptes apparaissent seulement à la page 466 tandis que le chapitre sur Galois s'achève page 300 ne facilite guère la compréhension. Cette première partie de la conclusion intitulée « Règles pour la direction de l'esprit », est indépendante des deux autres qui sont consacrées à la mathématique universelle. Elle renvoie clairement à la section première « Les règles de la méthode » en la concluant. Cette structure en diptyque de *La Philosophie de l'algèbre* me paraît témoigner de la genèse de l'ouvrage.

28. Vuillemin renvoie en note [Vuillemin 1962, n. 3, 469] aux *Seconds Analytiques* d'Aristote où ce thème, classique dans la tradition de la philosophie des mathématiques, se trouve élaboré pour la première fois. Sur les démonstrations causales de Arnauld à Bolzano, on pourra consulter [Mancosu 1996, 100–105].

29. Et ce, de manière « non distincte ». Par exemple, le fait de rapporter Lagrange au premier précepte pourrait paraître paradoxal dans la mesure où ce dernier emploie une méthode génétique. Mais c'est bien la *transition* initiée par Lagrange d'une méthode à l'autre qui intéresse Vuillemin : en accordant à celui-là le caractère réflexif de ses analyses sur la résolution des équations algébriques, en tant qu'elles sont fondées sur l'examen critique des méthodes à l'œuvre – lequel culmine avec la définition de la résolvante [Vuillemin 1962, 78–86] –, Vuillemin montre que l'emploi de la quatrième règle du *Discours* [Vuillemin 1962, 73] débouche sur la première règle de la méthode structurale.

1. « L'évidence des "natures simples" qu'on supposait au principe des mathématiques [est récusée] » : une fois les natures simples rejetées, l'intuition conçue par Descartes comme la représentation intellectuelle d'une nature simple perd son rôle objectif, pour ne « conserver [qu'] un rôle purement subjectif et psychologique [30] ». Les structures ultimes auxquelles l'analyse d'un problème doit parvenir sont en effet élémentaires mais ne sont pas simples, et si l'entendement permet de les apercevoir, seule la raison permet de rendre compte de leur apparition, et non l'intuition. On doit donc « réserver le mot de raison à la faculté de penser une structure [31] ».

2. L'identité générique entre les éléments de l'ordre analytique et de l'ordre synthétique et la réversibilité parfaite des méthodes qui en résulte, qui caractérisait la méthode génétique, disparaît dans la méthode structurale. En effet, « nous constatons qu'un groupe et une équation n'appartiennent pas au même genre d'êtres et qu'une structure n'est qu'une "cause" très lointaine d'événements » (p. 468). On est ainsi confronté à une nouvelle analyse structurale qui diffère, dans son essence, de l'analyse géométrique classique [32].

3. Un principe de relativité est importé au sein de la connaissance algébrique par la nouvelle méthode : le procédé d'adjonction de Galois montre que le problème de la résolubilité d'une équation doit être rapporté à une structure formelle, celle de corps. Une théorie de la vérité-correspondance doit être abandonnée : « le vrai c'est ce qu'on peut déduire d'une structure » (p. 472). Mais, plus important, les décisions du mathématicien, regardant le corps d'adjonction, qui pourraient paraître à la fois libres et arbitraires, sont *a posteriori* déterminées, lorsqu'elles sont effectives, par la théorie mathématique elle-même.

30. Cf. [Vuillemin 1962, 476–477]. Le rôle de l'intuition des structures dans la résolution des problèmes a naturellement été souligné par les mathématiciens, au premier rang desquels Bourbaki, dans une perspective opposée à celle du formalisme logique : cf. [Bourbaki 1948, 42–43].

31. Vuillemin consacre un long développement à cette distinction entre entendement et raison dans le chapitre dévolu à Lagrange [Vuillemin 1962, 115–116]. À nouveau, on retrouve ce caractère explicatif mis en avant par Bourbaki au sujet de la méthode axiomatique. Le but de celle-ci est de fournir « l'intelligence profonde des mathématiques », ce qui va bien au-delà de l'énoncé cartésien selon lequel « le caractère externe des mathématiques est de se présenter sous l'aspect de cette "longue chaîne de raisons" », cf. [Bourbaki 1948, 37]. Vuillemin écrit, comme en écho, dans *La Philosophie de l'algèbre* : « Les mathématiques sont moins une longue chaîne de raisons qu'une composition faite de différentes structures » [Vuillemin 1962, p. 471].

32. Dans la conclusion de *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Vuillemin avait déjà écrit à propos de l'impossibilité de la résolution par radical de l'équation du cinquième degré : « De cette difficulté, les Mathématiques ne triompheront qu'en concevant une méthode nouvelle, où l'analyse des structures précède et fonde l'analyse des problèmes particuliers » [Vuillemin 1960*b*, 141].

Vuillemin écrit ainsi :

> [...] les idées de corps conjugués séparables et de normalité [33] corrigent ce qu'il y avait d'arbitraire dans le procédé général de l'adjonction [chez Galois] : elles délimitent *a priori* les adjonctions convenables, c'est-à-dire requises pour un problème déterminé : l'extension du corps de base, qui, d'abord, paraissait ne dépendre que des décisions du mathématicien, trouve dans la nature même des problèmes auxquels il doit répondre des limites naturelles, de sorte que la relativité des corps, en premier lieu établie par rapport à une décision purement conventionnelle, est finalement fondée sur la spécificité des équations proposées.
> [Vuillemin 1962, 231]

N'est-ce pas là dire que le mathématicien dont l'invention est effective, en ce qu'elle résout le problème que ce dernier a choisi d'affronter, est à la fois libre et « en tout mené » par les mathématiques et leur développement ?

De la réflexion en mathématiques

Une même préoccupation traverse ces quatre préceptes, c'est celle de la réflexion en mathématiques [34] : ce sont en effet les structures qui rendent compte *nécessairement* à l'issue de l'expérience mathématique, telle qu'elle se déploie dans l'histoire, des méthodes de résolution des problèmes. Vuillemin insiste en outre sur le fait qu'il ne saurait y avoir de génie, sinon par provision et dans un sens psychologique, en mathématiques, en prenant pour exemple prototypique Gauss [35] :

> Le procédé de Gauss [pour définir les conditions de construction des polygones réguliers] nous donne le pourquoi de la solution et non seulement son comment. Elle dépend en effet non pas d'une intuition simplificatrice, mais des rapports de subordination entre les structures [36] et, à ce titre, de l'ordre des choses plutôt que de

33. Rappelons qu'« une extension E d'un corps K est galoisienne sur K si elle est algébrique et si K est le corps des invariants du groupe des K-automorphismes de E » et que cette propriété est équivalente au fait que E est normale et séparable : cf. [Bourbaki 1950, § 10, « Extensions galoisiennes », déf. 1 et prop. 1, 145]. Dans la présentation moderne, on considère, de manière plus générale, le groupe des automorphismes d'un corps, et non plus le groupe des permutations des racines d'une équation algébrique.

34. Sur la réflexivité mathématique et philosophique chez Vuillemin, cf. [Benis-Sinaceur 2018, 56–60].

35. Cf. [Vuillemin 1962, 149–152]. Vuillemin se fonde sur cette thèse pour répondre à la célèbre critique de Hegel contre la méthode mathématique dans l'introduction de *La Phénoménologie de l'esprit*, énonçant que la réflexion y demeure étrangère à son objet [Vuillemin 1962, 159].

36. Ces « rapports de subordination » renvoient à la décomposition du groupe de Galois de l'équation correspondant à la construction de l'heptadécagone régulier. Ce

> l'art de la science. Aussi une fois trouvée, élimine-t-elle le génie en révélant au grand jour ses principes – même si tel n'a pas été le cas immédiatement chez Gauss [...]. [Vuillemin 1962, 469]

À nouveau, dans sa *Leçon inaugurale* au Collège de France du 5 décembre 1962, Vuillemin posera le problème de l'autonomie de la philosophie de la connaissance vis-à-vis de la science en soulignant l'existence de deux sortes de réflexion appartenant, en propre, aux mathématiques et aux mathématiciens. La première accompagne une pratique rationnelle effective, en ce qu'elle permet de résoudre un problème au moyen d'une méthode, et se déploie à travers deux opérations, l'abstraction et la généralisation. La seconde relève de la métamathématique [Vuillemin 1963, 17–21]. Selon Vuillemin :

> Nulle, mieux [que la notion de structure], ne paraît susceptible d'éclairer les deux sortes de réflexion qu'on a reconnues propres au mathématicien, non plus que le profit que la critique philosophique en peut tirer. [Vuillemin 1963, 21]

C'est donc dans un nouveau type d'abstraction, fondé sur la considération des structures, que va se réaliser l'idéal réflexif des mathématiques modernes. Mais quelle abstraction et quelles structures ?

2.3 Méthodes et objets

Comme on l'a déjà vu, selon Vuillemin, la méthode ne cesse pas d'accompagner la pratique mathématique en se réalisant par la suite dans ses théories et ses objets. On retrouve cette idée déjà exprimée chez Descartes sous la forme d'une norme : la méthode de résolution d'un problème doit être fondée dans la théorie ou, pour employer le langage cartésien, dans la « nature » des objets considérés [37].

Dans la conclusion de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]*, Vuillemin précise la nature de la connaissance pure en algèbre en rapportant celle-ci à son objet, sa méthode et ses principes [38], et en résumant les différentes étapes dans l'évolution respective de chacune de ces composantes.

L'évolution des objets [Vuillemin 1962a, 355–357] est déclinée en trois « moments » principaux :

> Le premier accomplit le projet cartésien ; il aboutit à Lagrange. Le second est illustré par Galois. Dedekind et Birkhoff représentent le troisième. [Vuillemin 1962a, 355]

---

groupe est cyclique d'ordre 16 : c'est ce qui *explique* qu'une telle construction soit possible à la règle et au compas. Voir [Vuillemin 1960*b*, 139–149].

37. Ainsi la méthode des normales de Descartes « est tirée d'une connaissance de la nature des équations ». Cf. la lettre à Mersenne de janvier 1638 [Descartes 1897-1913, I, 190].

38. La première phrase de l'introduction de *La Philosophie de l'algèbre* ne considérera que deux de ces aspects (si l'on rapproche « origine » de « principes ») : « Les connaissances peuvent être divisées selon leur origine ou selon leur méthode » [Vuillemin 1962, 1].

Le fait que Vuillemin ait choisi de présenter des moments plutôt que des périodes mérite d'être noté. Ce sont bien des espaces de temps brefs ou, à tout le moins, entièrement déterminés en tant qu'ils sont illustrés par un auteur, qui témoignent du passage d'une période à une autre qui l'intéressent au premier chef. De tels passages, que d'aucuns pourraient nommer révolutions, sont annoncés par des prémices qu'on rencontre dans l'ordre de la méthode. Le premier et le deuxième moments sont traités dans *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962, chap. I–IV] – bien que Vuillemin affirme dans l'introduction qu'il ne s'y occupe que des méthodes. Le troisième l'est dans la deuxième partie de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* [Vuillemin 1962a, chap. X–XII].

C'est ensuite sur l'opération d'abstraction que Vuillemin fait porter son attention :

> L'algèbre des structures met au contraire en jeu un second type d'abstraction [39], qui établit la cause ou raison d'être des propriétés liées aux individus, en la cherchant dans les structures algébriques auxquelles ils obéissent. [Vuillemin 1962a, 355–356]

Il s'agit de l'abstraction évoquée dans la *Leçon inaugurale*. On retrouve la même idée exprimée dans *La Philosophie de l'algèbre* au sein des deux premiers préceptes de la méthode [40], mais sans que le terme d'abstraction n'y soit employé [Vuillemin 1962, 467–468].

Vuillemin décrit ensuite l'évolution des méthodes, qui s'achève sur le parachèvement de la méthode structurale en une méthode proprement axiomatique [Vuillemin 1962a, 357–359] :

> Lorsqu'on en tire toutes les conséquences, la méthode structurale doit être axiomatique. Autrement dit, elle doit examiner systématiquement et *a priori* les conséquences d'une structure donnée par des postulats définis. [...] Mais le développement conséquent de la méthode axiomatique exigeait deux conditions qui n'ont été réalisées véritablement que dans le troisième moment de l'Algèbre [l'étude des structures pour elles-mêmes et la relativité de la connaissance]. [Vuillemin 1962a, 358]

À nouveau, la relativité de la connaissance dont il est question ici est abordée par Vuillemin dans le deuxième moment de l'algèbre [Vuillemin 1962, 472].

Si l'on maintient une solidarité entre les méthodes et les objets, et qu'on introduit, en complément des « moments » de transition, les périodes, on peut résumer le triptyque de Vuillemin de la manière suivante :

39. Comparée à la double abstraction de l'algèbre cartésienne opérée par l'usage du calcul littéral concomitant à l'économie de l'intuition des figures : cf. [Vuillemin 1962a, 355].

40. À nouveau, le registre des objets se mêle à celui des méthodes.

— **Première période, de Descartes à Lagrange** : équations algébriques, méthode génétique ;

— **Deuxième période, de Lagrange à Galois** : structures (implicites), méthode structurale (pré-axiomatique) ;

— **Troisième période, de Galois à Dedekind et Birkhoff** : algèbres [41], méthode structurale axiomatique,

ceci au prix d'un double « brouillage » entretenu, d'une part, par les allers-retours incessants de Vuillemin entre méthodes et objets, d'autre part, par sa lecture rétrospective des méthodes [42] qui ne portent pas tant sur un domaine d'objets, qu'elles n'assurent le passage graduel d'une période à une autre.

Vuillemin conclut avec l'évolution des principes [Vuillemin 1962, 359–360]. Ceux-ci sont relativisés du fait de l'emploi de la méthode axiomatique :

> Les principes mêmes des mathématiques [...] cesseront alors d'apparaître attachés intuitivement à la nature de notre esprit. S'ils sont liés à une structure, on devra essentiellement examiner plusieurs mathématiques possibles, en tant qu'on les utilisera ou qu'au contraire on en fera l'économie. [Vuillemin 1962a, 359] [43]

On retrouvait déjà cette solidarité entre méthode et théorie chez Cavaillès [44], en particulier dans *Méthode axiomatique et formalisme* [Cavaillès 1938] [45], à la différence importante près que ce dernier ignore les acteurs d'une telle méthode, les mathématiciens [Benis-Sinaceur 2019, 159*sq.*], alors que Vuillemin tâche de rapporter la conscience mathématicienne à l'œuvre dans l'invention d'une méthode aux concepts mathématiques qui en révèlent les raisons de l'« effectivité » dans les développements mathématiques à venir [46].

41. Au sens de l'algèbre universelle.

42. Pour une autre proposition d'interprétation du rapport entre méthodes et objets, cf. dans le présent dossier la contribution de Baptiste Mélès.

43. Je cite ici la conclusion en prenant en compte les corrections manuscrites de simple forme de Vuillemin.

44. Sur « Vuillemin, continuateur de Cavaillès », cf. la contribution d'Hourya Benis-Sinaceur et Emmylou Haffner dans le présent dossier.

45. Comparer avec : « Doublant le champ thématique se trouve le système des *méthodes* impossibles à préciser autrement que par l'intuition centrale qui dirige les variations de leurs applications et qui constitue l'unité profonde – mais cette fois saisissable dans l'action – d'une théorie » [Cavaillès 1938, 178]. Cf. également « La pensée mathématique » [Cavaillès 1994, 594]. On trouve dans ce dernier texte une réaction intéressante d'Hyppolite aux conférences de Lautman et Cavaillès concernant « le développement de la théorie des équations de Viète à Galois » [Cavaillès 1994, 620–621].

46. Une solution possible à cette hétérogénéité, qui s'appuie sur l'intentionnalité de la conscience, a été proposée par la phénoménologie husserlienne. Elle est critiquée par Vuillemin [Vuillemin 1962, 491–495] et a été rejetée auparavant par Cavaillès [Benis-Sinaceur 2019, 162*sq*].

3 La méthode structurale en acte ?

3.1 Méthode et structures

Vuillemin ayant dégagé la méthode structurale des limbes mathématiques du XIXe siècle en s'appuyant sur les travaux de Lagrange, Gauss, Abel et Galois, on pourrait s'attendre à ce qu'il exemplifie son usage au sein des mathématiques modernes structurales proprement dites, conformément au programme qu'il a annoncé [Vuillemin 1962, 65–66].

Force est de constater qu'il ne le fait pas vraiment dans la deuxième partie de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* intitulée « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique ». Dans cette partie, non publiée, il aborde certes un matériau mathématique plus contemporain, qui concerne en particulier les structures d'ordre et la théorie des treillis de Birkhoff, cf. [Vuillemin 1962a, chap. XII, L'algèbre générale, 322–354], mais celui-ci relève déjà d'un nouveau moment, celui de l'algèbre de l'algèbre. De cette absence, il est permis de tirer deux hypothèses, à défaut de conclusions qui nécessiteraient un examen détaillé que n'autorise pas le format de cette contribution.

La première est de nature génétique et voit le « tour de force » de la reconstruction nécessaire de la section « Les règles de la méthode » comme une élaboration tardive résultant de l'extension de la première partie de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* qui n'apparaissait pas ou, à tout le moins, était beaucoup moins marquée, dans le projet initial [47].

La conclusion de *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* que nous venons d'examiner en témoigne assurément. Les préceptes de la méthode n'y sont pas même mentionnés. On retrouve bien certains éléments de ceux-là mais dans la partie consacrée à l'évolution des *objets* de la connaissance algébrique [48]. Quant à la partie abordant l'évolution concurrente des méthodes, la (première) méthode structurale n'y est évoquée qu'au travers d'une phrase où elle est réduite à l'analyse structurale dont le propre est de « passer du réel

47. Il semble en revanche que Vuillemin avait bien l'intention de continuer à dérouler ce fil de la méthode *après La Philosophie de l'algèbre*. Le chapitre VIII « Philosophie de la définition » de la deuxième partie inédite révisée qu'on trouve dans le document B (cf. *supra* n. 16, p. 77) cite ainsi explicitement les trois problèmes de la conclusion de *La Philosophie de l'algèbre* [Vuillemin 1962b, 34]. Si le titre d'une première partie, interne aux chapitres, intitulée « Questions de méthode », figure immédiatement à la suite, on ne trouve pas d'autres titres indiquant que les deux parties suivantes aient été rédigées par Vuillemin. Ce dernier s'est contenté de reprendre les deux derniers paragraphes du chapitre d'origine dans le document A [Vuillemin 1962a, §§ 43–44, 211–223]. Cf. la notice de Gudrun Vuillemin-Diem dans le dossier documentaire consacré au tome II de *La Philosophie de l'algèbre*.

48. Le rapport de la structure aux individus auxquels celle-là s'applique porte deux conséquences : « la notion d'opération est dégagée de ses illustrations particulières » ; « tout individu est relatif à une structure qui détermine *a priori* son degré de discernabilité ». Cf [Vuillemin 1962a, 356].

au possible » [Vuillemin 1962a, 358] [49], avant de faire place à la méthode structurale axiomatique.

La seconde réponse à cette absence est de nature conceptuelle. Prenant sa source dans les réflexions de Vuillemin sur le génie en mathématiques, elle renvoie à la double question de l'identification et de la pérennité d'une méthode *générale* en mathématiques [50] : si l'on admet un effet « retard » dans la réflexion mathématique par rapport aux méthodes d'invention, on serait alors fondé à penser que la méthode des mathématiques contemporaines ne saurait être trouvée *hic et nunc*, mais seulement identifiée dans un développement futur qui pourrait être, dans le cas de l'algèbre abstraite, la théorie des catégories [51]. Suivant cette perspective récurrente assumée par Vuillemin, l'épistémologie historique consisterait à reconstruire les méthodes « effectives » à partir des « idées [52] nouvelles qui [leur] correspondent » [Vuillemin 1962, 66] [53].

D'autre part, si la méthode des mathématiques est sujette à des renouvellements, comme la méthode philosophique, qu'en est-il de la fréquence et de la

49. Vuillemin mentionne ici Abel. On retrouve le même jugement dans *La Philosophie de l'algèbre* à propos de la démonstration et du style d'Abel : cf. [Vuillemin 1962, 208–209]. Cela montre que des éléments du chapitre consacré à Abel dans [Vuillemin 1962, chap. III, 207–221] étaient déjà présents dans [Vuillemin 1962a].

50. J'entends ici distinguer la méthode génétique et la méthode structurale des nombreuses méthodes locales à l'œuvre dans la pratique mathématique. Ce sont par exemple, pour Cavaillès, « le calcul desarguien en géométrie projective élémentaire, le procédé général de la diagonale ou la linéarisation dans la théorie de Cantor, le procédé de la chaîne pour Dedekind » [Cavaillès 1938, 178]. Ce qui fait la force et l'originalité de la contribution de Vuillemin est que sa méthode constitue non seulement un moyen terme entre la méthode globale axiomatico-déductive et les nombreuses méthodes locales, mais qu'elle s'ajuste à la fois à la réalité de la pratique, comme celles-ci, et à un champ étendu, comme celle-là.

51. Dans les années 1950, la distance temporelle nécessaire pour effectuer un tel examen réflexif manquait assurément à Vuillemin. Si l'on pense, comme lui, que la réflexion de l'épistémologue doit s'appuyer, nécessairement, sur une réflexion mathématique *a posteriori* du génie incarné dans un moment mathématique, on serait porté à penser qu'il ne saurait exister de philosophie des mathématiques contemporaines, et que la métaphore hégelienne, devenue banale, de l'envol crépusculaire de la chouette de Minerve est en fin de compte d'une vérité amère pour la philosophie des mathématiques. Sur le rôle laissé par le mathématicien au philosophe, voir [Vuillemin 1963, 18–20].

52. Vuillemin emploie concurremment les termes « idées », « objets » [Vuillemin 1962, 65] et « concepts » (qu'on pense au sous-titre de *La Philosophie de l'algèbre*) pour désigner le produit ou corrélat d'une méthode effective. Je n'entre pas ici dans une analyse conceptuelle, fine, de ces variations.

53. Les mathématiques seraient alors le règne du « plagiat par anticipation ». Là où Le Lionnais écrit « Il nous arrive parfois de découvrir qu'une structure que nous avions crue parfaitement inédite avait déjà été découverte ou inventée dans un passé lointain. Nous nous faisons un devoir de reconnaître cet état de choses en qualifiant les textes en cause de plagiat par anticipation », l'épistémologue écrira « il nous arrive *toujours*... ».

nature de ceux-là (en laissant de côté le foisonnement des méthodes « locales » de résolution de problèmes) ? L'histoire sur la longue durée des mathématiques qu'on pourrait dégager du projet de Vuillemin d'une philosophie de l'algèbre paraît identifier deux époques : celle de la méthode génétique appliquée à la mathématique matérielle, et celles de la méthode structurale appliquée à la mathématique formelle [Vuillemin 1962, 288]. Au sein de chacune de ces deux méthodes, on rencontre une analyse et une abstraction [54].

3.2 Quelles structures ?

Laissons à présent de côté le « tour de force » des préceptes de la méthode structurale, pour nous en tenir à la notion de structure qui joue un si grand rôle dans le projet de Vuillemin. Quel terminus *ad quem* pouvait-il choisir, au sein des mathématiques proprement structurales, après la *Moderne Algebra* de Van der Waerden [van der Waerden 1930] ? Parmi les théories proposant une élucidation de la notion de structure, on en dénombre trois possibles [55] qui ont été étudiées dans le détail par Corry dans la seconde partie de son ouvrage classique *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* [Corry 2004, 253–380] : la théorie des structures algébriques d'Ore et celle des treillis de Birkhoff, la théorie des (espèces de) structures de Bourbaki, et la théorie des catégories [56].

54. Si l'on prend en compte dans l'analyse *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* (voir *supra* section 2.3, p. 85), se pose la question de distinguer deux méthodes structurales et deux mathématiques formelles, la seconde de celles-là, axiomatique, portant sur les formes des formes, à savoir les algèbres de structures. De manière plus générale, on peut s'interroger sur la possibilité d'un enchaînement indéfini de telles abstractions que Cavaillès qualifiait de thématisation et sur lesquelles reviendra Gardies en les rapportant à l'*echtesis* platonicienne (voir *infra* section 4, p. 94). Je considère, en m'appuyant sur le texte de Vuillemin et en me focalisant sur l'opération plutôt que sur le résultat, qu'il n'existe à proprement parler que deux mathématiques, l'une matérielle et l'autre formelle, laquelle s'étage en différentes composantes produites par les abstractions successives.

55. Et une quatrième notoirement ignorée comme aurait pu l'écrire Vialatte. J'y reviendrai.

56. Ces théories des structures étaient en outre relativement antagonistes, si l'on en croit leurs promoteurs respectifs. Dieudonné écrit ainsi à propos de la théorie des treillis dans sa préface à la traduction française de l'*Algèbre* de Birkhoff et Mac Lane : « Il semble par contre que les auteurs auraient pu sans inconvénient omettre le chapitre sur les “lattices” auxquels toute une école américaine voue une prédilection persistante, malgré le peu d'intérêt que présente cette théorie dans les autres branches des mathématiques ». Cf. [Birkhoff & Mac Lane 1970, xiv]. Mac Lane a émis de son côté un jugement critique sur la généralité stérile de la théorie bourbakiste des espèces de structure. Cf. [Mac Lane 1971, 103].

Vuillemin n'aborda pour ainsi dire jamais la dernière, dont les premières élaborations, dans la ligne de l'une et l'autre des deux autres théories, avaient déjà été produites avant *La Philosophie de l'algèbre* [57].

Une autre abstraction

Vuillemin se réfère d'autre part à Bourbaki dans *La Philosophie de l'algèbre* lorsqu'il aborde la notion d'opération interne au sein du paragraphe clef intitulé « De l'idée de structure algébrique dans son rapport avec l'abstraction : la notion générale d'opération » [Vuillemin 1962, 257–263]. Partant de « l'idée de groupe abstrait, telle que Galois l'a définie, ou plutôt telle que les Modernes l'ont axiomatisée [58] », Vuillemin insiste sur le fait que la notion d'opération interne sur un ensemble E, définie comme une fonction de $E \times E$ dans E est l'« idée mère de la notion de structure [59] » et que « les éléments du groupe sont toujours des opérations » :

> [...] l'idée de structure paraît résulter d'une abstraction formelle au second degré. N'importe quel élément de E peut être mis en correspondance avec n'importe quel autre élément, et cette correspondance donne toujours un résultat défini. Ainsi, l'opération est comme abstraite de son résultat : comme le dit Galois, les permutations désignent les substitutions, mais comme je puis composer n'importe quelle permutation avec n'importe quelle autre, cette liberté indique qu'en réalité j'opère avec les substitutions et non les permutations mêmes, autrement dit, que les éléments du groupe sont toujours des opérations, bien qu'on puisse désigner ces opérations par leurs résultats. [Vuillemin 1962, 260–261]

Le théorème bien connu de Cayley – que Vuillemin ne mentionne pas – procurerait une manière de comprendre cette thèse dans le cas d'un groupe abstrait (et non plus seulement d'un groupe de permutations). Ce théorème énonce que tout groupe G est isomorphe à un groupe de transformations [60].

57. En particulier, Samuel avait publié en 1948 un article intitulé « On universal mappings and free topological groups » dans lequel on trouve présentées les notions de problèmes et d'application universels avec un point de vue (pré-)catégorique : cf. [Samuel 1948], [Corry 2004, 354–356], et [Maronne 2014]. Cet article est à l'origine des rédactions de Bourbaki sur ce même thème. En témoigne un « rapport sur les applications universelles » dont le rédacteur est très vraisemblablement Samuel au regard des similitudes avec l'article cité auparavant : cf. [Samuel 1948 ?].

58. Cf. [Vuillemin 1962, 257]. Cette remarque est révélatrice.

59. Cf. [Vuillemin 1962, 260] Vuillemin paraît tirer cette idée de l'introduction de Bourbaki [Bourbaki 1950, 1–2] qu'il cite à cette occasion.

60. Il suffit de considérer par exemple l'ensemble des translations à gauche $\varphi_a : g \longrightarrow ag$ pour $a \in G$. Si G est fini, φ_a correspond à la permutation donnée par la $a^{\text{ème}}$ ligne de la table de multiplication du groupe et l'analogie esquissée par Vuillemin prend tout son sens. Sur la table de multiplication d'un groupe, cf. [Birkhoff

Vuillemin aurait alors en tête la notion de représentation (linéaire) d'un groupe et, de manière plus générale, celle d'opération d'un groupe sur un ensemble. L'abstraction envisagée ici, à l'origine de l'idée de structure, est très différente de celle déjà évoquée dans la section précédente [61], et paraît relever, en partie, d'une thématisation, bien que Vuillemin n'emploie pas ce terme [62].

Vuillemin ne considère d'autre part la théorie mathématique et logique des structures d'ordre et des treillis, en s'appuyant en particulier sur les contributions de Birkhoff et Curry [63], que dans *La Philosophie de l'algèbre [état 0]* [64]. Vuillemin cite en particulier la théorie des treillis de Birkhoff lorsqu'il définit l'algèbre générale, véritable « algèbre de l'algèbre », en tant qu'elle fournit une « théorie des relations entre les théories elles-mêmes » [Vuillemin 1962a, 329]. Quelles sont les raisons d'un tel choix ?

Une nouvelle analyse classificatoire

L'une de ces raisons, sinon peut-être la principale, qui est d'ordre téléologique, tient vraisemblablement au fait que le problème fondamental de la philosophie théorique que vise Vuillemin se confond avec celui de la décomposition élémentaire d'une théorie [Vuillemin 1962, 331]. Il faut en effet se souvenir que l'examen de l'histoire de la méthode en mathématiques est propédeutique au renouvellement de la méthode de la philosophie théorique. On est donc ramené, écrit Vuillemin, au problème de l'analyse philosophique et de la réduction du complexe au simple exprimé par la deuxième règle du *Discours de la méthode* [65]. Or la théorie abstraite des treillis constitue le résultat ultime du développement des théorèmes de *décomposition* des structures (Jordan-Hölder, Noether) [Vuillemin 1962, 332] [66].

& Mac Lane 1953, 128–129] qui figure dans la bibliographie de [Vuillemin 1962]. Vuillemin a d'ailleurs mentionné auparavant, en passant, les tables de multiplication des groupes [Vuillemin 1962, 260].

61. Sur l'abstraction structurale, voir aussi la contribution de David Thomasette dans le présent dossier.

62. En effet, l'opération sous-jacente à la translation à gauche φ_a « devient à son tour point d'application d'une opération supérieure » : la composition des applications φ_a. Cf. *Sur la logique et la théorie de la science* [Cavaillès 1947, 30–34], ainsi que [Benis-Sinaceur 2019, 135–146].

63. Cf. [Birkhoff 1948] et [Curry 1952]. Ces deux références figurent dans *La Philosophie de l'algèbre.*

64. Cf. [Vuillemin 1962a, chap. XII, L'algèbre générale, 322–354]. Sur Vuillemin et la théorie des treillis, cf. dans le présent dossier la contribution de Simon Decaens.

65. « Telle est la voie dans laquelle la Mathématique moderne cherche et détermine la réponse qu'on peut donner à la question que Descartes posait implicitement en formulant la seconde règle du discours de la méthode » [Vuillemin 1962a, 332].

66. Vuillemin donne ici une citation *in extenso* de l'ouvrage de Bell intitulé *The Development of Mathematics* : cf. [Bell 1945, 260–261]. Dans son analyse de la théorie des treillis, Vuillemin apparaît clairement dépendant de la présentation de Bell [Bell 1945, chap. 11, « Emergence of Structural Analysis », 245–269]. Dans cet ouvrage, Bell

Cette nouvelle analyse classificatoire, qui porte sur les structures et non plus sur les individus, rapproche la mathématique de la logique. Elle est évoquée par Vuillemin dans *La Philosophie de l'algèbre* :

> Longtemps, les philosophes opposèrent donc le concept biologique ou classificatoire et le concept mathématique ou analytique. Mais l'intervention des structures fait voir que c'est une seule et même chose d'assigner les causes des propriétés et de définir un concept dans une classification. Bien plus, ce qui est rationnel dans l'analyse ne dépend que de cette découverte de la hiérarchie des genres et des espèces, rendue à la vie par la théorie des structures. [Vuillemin 1962, 390]

Dans sa recherche d'une théorie mathématique moderne des structures en résonance avec ses préoccupations philosophiques concernant les problèmes de décomposition et de classification des théories, on comprend donc la raison pour laquelle Vuillemin put se tourner vers la théorie des treillis, avant que le développement des mathématiques modernes, et de la théorie des catégories, ne lui donnent tort [67]. On peut rapporter cette « sélection » à la description des tendances générales de l'algèbre moderne des structures donnée par Mac Lane dans la conclusion « What is algebra ? » de son article « Some recent advances in Algebra [68] ».

Parmi les recherches modernes consacrées aux structures, la première concerne :

> the number and interrelations of the subsystems of a given system, either subsystems just like the whole system (lattice of subgroups), or subsystems with especially characteristic properties (set of integers, maximal orders, ideals, subfields of an algebra, *etc.*). [Mac Lane 1939, 18]

---

a choisi de présenter certains thèmes tirés du développement des mathématiques sur les conseils avisés de « professionnels » [Bell 1945, vii]. Pour davantage d'informations sur Bell, cf. [Dauben & Scriba 2002, 272–273 ; 359–361].

67. La méthode de la philosophie théorique ne saurait emprunter qu'à une théorie mathématique féconde. « Les parutions récentes sur [le concept] de structure » auxquelles Vuillemin réfère dans la quatrième de couverture de la réédition de *La Philosophie de l'algèbre* de 1993 pourraient ainsi concerner la théorie des catégories.

68. Cf. [Mac Lane 1939]. Cet article est cité dans [Bell 1945, n. 13, 259]. La description faite par Mac Lane est analysée par Corry dans son ouvrage [Corry 2004, 255–258]. Une autre source possible pour Vuillemin pourrait être l'exposé d'Øystein Ore sur « l'algèbre abstraite » paru chez Hermann en 1936. On y retrouve dans la dernière section « Structures » les idées exprimées par Vuillemin : « [...] j'ai insisté particulièrement sur les propriétés structurelles, c'est-à-dire, sur les *théorèmes de décomposition*. Il suffit d'un coup d'œil pour vérifier que les résultats concernant les systèmes différents, que nous avons étudiés, sont, en beaucoup de façons, semblables. [...] Observons d'abord que dans les théorèmes de décomposition ne figurent jamais les éléments du système considéré » [Ore 1936, 50].

C'est bien la voie qui a été choisie par Vuillemin [69].

4 Épilogue : l'extension structurale des ensembles de nombres

Le chapitre VII de la deuxième partie inédite de *La Philosophie de l'algèbre* intitulé « Les trois types d'extension de la notion de nombre [70] » offre un épilogue à *La Philosophie de l'algèbre* à différents titres. D'une part, le problème classique qui y est considéré est l'occasion pour Vuillemin de montrer comment substituer une extension structurale à une extension génétique dans la ligne de son projet [71]. D'autre part, « le problème de l'extension des notions mathématiques [...] correspond à la fois au problème de la définition structurale par abstraction relative à des classes d'équivalence et au problème de la classification et de la subordination des structures » [Vuillemin 1962b, 38].

Vuillemin présente ainsi de manière détaillée deux extensions structurales de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels qui lui permettent de définir successivement l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs et l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels en ne s'appuyant que sur un ensemble produit et une structure quotient obtenue à partir de celui-ci au moyen d'une relation d'équivalence appropriée [Vuillemin 1962b, 29–33] [72]. Cette extension structurale répond à

69. Dans son analyse, Corry mentionne une élaboration alternative du concept de structure due à Marc Krasner : cf. [Corry 2004, n. 3, 254 et n. 7, 257]. Marc Krasner fut professeur de mathématiques à l'université de Clermont-Ferrand de 1960 à 1965, donc au même moment que Vuillemin. On peut lire la belle notice nécrologique que lui a consacrée Dieudonné, qui fut son ami : cf. [Dieudonné 1986]. Les travaux de Krasner portent à la fois sur une généralisation de la théorie de Galois et sur la logique mathématique. Cf. par exemple [Krasner 1938, 1962, 1968-1969]. Sur Krasner et les structures, on peut consulter [Guillaume 2009, 204–221]. Les travaux de Krasner auraient pu ainsi offrir un riche matériau aux analyses de *La Philosophie de l'algèbre* de Vuillemin : on ne devrait jamais quitter Clermont-Ferrand.

70. Vuillemin y a signalé, à la main, trois parties [Vuillemin 1962b, resp. 4, 15, 29] qui correspondent aux trois types d'extension : extension génétique et inversion des problèmes, extension et méthode des congruences, extension structurale.

71. On peut également penser à l'opposition soulignée par Hilbert entre méthode axiomatique en géométrie et méthode génétique en arithmétique qui ouvre le chapitre II de *Méthode axiomatique et formalisme* de Cavaillès : cf. [Cavaillès 1938, 76–77].

72. Vuillemin applique pour être exact la construction à $\mathbb{N}^*$ et non à $\mathbb{N}$. Il a corrigé systématiquement une première notation E qui reprenait celle de Bourbaki utilisée dans [Vuillemin 1962, 260], lorsqu'il était question de la définition d'une opération interne dans E comme fonction définie sur l'ensemble produit $E \times E$. On trouve du reste une référence manuscrite en note à cette page [Vuillemin 1962b, 29]. Les inventions indépendantes du « procédé du couple numérique » par Hamilton en 1836 et Gauss en 1831 mentionnées dans des notes manuscrites figure dans [Bell 1945, chap. 8 « Extensions of Number », 179–180].

un principe de parcimonie ontologique *a contrario* d'une extension génétique, dans laquelle « de nouveaux individus [sont] mystérieusement engendrés à cette seule fin » [Vuillemin 1962b, 32].

Abstraction, analyse et thématisation selon Gardies

On peut remarquer, comme le note Gardies dans son ouvrage paru en 2001, *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ?*, que l'abstraction en jeu dans de telles constructions relève d'une thématisation fondée sur la reconnaissance d'une relation d'équivalence : les différents nombres ainsi construits (entiers naturels, relatifs, rationnels, ...) ne se situent pas « au même niveau d'existence » [Gardies 2001, 171] [73]. Ce phénomène de thématisation permet en outre de comprendre une seconde forme d'analyse qui partage certaines de ses caractéristiques avec l'analyse structurale. Selon Gardies, on rencontre chez Fermat et Descartes, concurremment à l'analyse classique réversible en la synthèse, une seconde forme d'analyse qui procède à partir d'une propriété générale vers les objets géométriques [Gardies 2001, 122–128]. Cette propriété générale, qui s'exprime sous la forme de l'équation générale du second degré à deux inconnues, dans le cas de l'étude des lieux solides ou des courbes solutions du problème de Pappus à quatre lignes, est érigée en une entité nouvelle et thématisée [74]. Celle-ci peut être étudiée pour elle-même, sans pour autant considérer les objets en relation [Gardies 2001, 140–141]. Ainsi :

> [...] le retournement qu'évoque l'étymologie même du terme *d'analyse* [...] ne [figure] plus la simple inversion de la démarche synthétique censée primitive et comme naturelle, mais l'accession à des entités mathématiques radicalement neuves, dont se [laissent] ensuite déduire, comme conséquences, les propriétés des objets sur lesquels s'[est] appuyée leur thématisation. [Gardies 2001, 177]

Abstraction, thématisation, analyse : voici que trois pièces maîtresses du dispositif de Vuillemin apparaissent à présent harmonieusement ajustées.

Vers les catégories

Mais qu'en est-il de la raison d'être et de la nécessité de telles extensions structurales ? Les deux constructions appliquées par Vuillemin peuvent être interprétées comme étant celles du groupe des différences ou symétrisé d'un monoïde commutatif (noté additivement) et du corps des fractions d'un anneau intègre appliquées respectivement à $\mathbb{N}$ et à $\mathbb{Z}$. Ces deux problèmes sont des problèmes d'application universelle [75] dont les ensembles $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ ainsi construits

73. Gardies rapproche ce procédé de thématisation de l'*ecthesis* platonicienne : [Gardies 2001, 174].

74. Gardies se réfère explicitement à Cavaillès : cf. [Gardies 2001, 131].

75. Comme nous l'avons vu, Samuel est à l'origine de la formalisation de tels problèmes. Cf. [Samuel 1948] et n. 57, p. 90.

sont les solutions à isomorphisme unique près [76]. S'ouvre ici une nouvelle étape dans le développement de la Philosophie de l'algèbre, celui de la théorie des catégories.

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement Baptiste Mélès pour ses remarques et commentaires précieux qui ont enrichi et clarifié le contenu de cette contribution.

Bibliographie

BELAVAL, Yvon [1960], *Leibniz critique de Descartes*, Tel, Paris : Gallimard, nouvelle éd., 1976.

BELL, Eric T. [1945], *The Development of Mathematics*, New York : Mc Graw-Hill, 2e éd.

BENIS-SINACEUR, Hourya [2018], Scientific philosophy and philosophical science, dans *The Philosophers and Mathematics : Festschrift for Roshdi Rashed*, édité par H. Tahiri, Cham : Springer International Publishing, *Logic, Epistemology, and the Unity of Science*, t. 43, 25–66, doi : 10.1007/978-3-319-93733-5_2.

—— [2019], *Jean Cavaillès. Philosophie mathématique*, Philosophies, Paris : PUF, 2e éd. revue et augmentée.

BIRKHOFF, Garrett [1948], *Lattice Theory*, New York : American Mathematical Society, 2e éd.

BIRKHOFF, Garrett & MAC LANE, Saunders [1953], *A Survey of Modern Algebra*, New York : Macmillan, éd. révisée.

—— [1970], *Algèbre 1. Structures formelles*, Paris : Gauthier-Villars, préface de J. Dieudonné. Trad. fr. par J. Weil.

BOURBAKI, Nicolas [1948], L'architecture des mathématiques, dans *Les Grands Courants de la pensée mathématique*, édité par F. Le Lionnais, Paris : Cahiers du Sud, 35–47, réimprimé chez Hermann, Paris, 1998. Les références renvoient à cette édition.

—— [1950], *Éléments de mathématiques*, t. II : Algèbre, Paris : Hermann, 4 vol., chap. I–VI.

76. Soit l'injection canonique $i : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ainsi construit. Pour tout homomorphisme injectif $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow G$, où G est un groupe, il existe un *unique* homomorphisme $\tilde{\varphi}$ tel que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ i$. $\mathbb{Z}$ est donc « le plus petit » groupe contenant le monoïde commutatif $\mathbb{N}$.

—— [1960], *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris : Hermann.

Canguilhem, Georges [2011-], *Œuvres complètes (6 tomes)*, Paris : Vrin.

Cavaillès, Jean [1938], *Méthode axiomatique et formalisme. Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris : Hermann, republié dans [Cavaillès 1994, 1–202].

—— [1947], *Sur la logique et la théorie de la science*, Paris : PUF, édité par G. Canguilhem et Ch. Erehresmann, 2e éd., avec une préface de G. Bachelard, Paris, PUF, 1960. Republié dans [Cavaillès 1994, 473–560].

—— [1994], *Œuvres complètes de philosophie des sciences*, Paris : Hermann.

Corry, Leo [2004], *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Bâle ; Boston ; Berlin : Springer, 2e éd.

Curry, Haskell B. [1952], *Leçons de logique algébrique*, Paris : Gauthier-Villars.

Dauben, Joseph W. & Scriba, Christoph J. (éd.) [2002], *Writing the History of Mathematics : Its Historical Development*, Bâle : Birkhäuser.

Descartes, René [1637], Discours de la méthode, dans *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette Méthode*, Leyde : I. Maire, 1–78, édité dans [Descartes 1897-1913, VI, 1–78]. Les références renvoient à cette édition.

—— [1637a], La Géométrie, dans *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie qui sont des essais de cette Méthode*, Leyde : I. Maire, 297–413, édité dans [Descartes 1897-1913, VI, 367-485]. Les références renvoient à cette édition.

—— [1897-1913], *Œuvres de Descartes*, Paris : Cerf, 11 vol., éd. de Ch. Adam et P. Tannery. Nouvelle éd., Paris : Vrin, 1964-1971. Reprint 1996.

Dieudonné, Jean [1986], Marc Krasner, *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques*, 7, 29–30, http://www.numdam.org/item/CSHM_1986__7___29_0/.

Gardies, Jean-Louis [2001], *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ? Essai de définition*, Librairie Philosophique. Problèmes et Controverses, Paris : Vrin.

Granger, Gilles-Gaston [1968], *Essai d'une philosophie du style*, Philosophies pour l'âge de la science, Paris : Armand Colin.

Guillaume, Marcel [2009], La logique mathématique en France entre les deux guerres mondiales : quelques repères, *Revue d'Histoire des Sciences*, 61(1), 177–219, doi : 10.3917/rhs.621.0177.

Guillin, Vincent [2015], « Descartes à travers mes âges ». Retour sur quelques lectures cartésiennes de Canguilhem, *Revue de métaphysique et de morale*, 87(3), 307–328, doi : 10.3917/rmm.153.0307.

Israel, Georgio [1998], Des *Regulae* à la *Géométrie*, *Revue d'Histoire des Sciences*, 51(2–3), 183–226, doi : 10.3406/rhs.1998.1322.

Krasner, Marc [1938], Une généralisation de la notion de corps, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 17, 367–385.

—— [1962], Le définitionnisme, *Annales scientifiques de l'Université de Clermont*, 7(1), 55–81, http://www.numdam.org/item/ASCFM_1962__7_1_55_0/.

—— [1968-1969], Endothéorie de Galois abstraite, *Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, 22(6), 1–19, http://www.numdam.org/item?id=SD_1968-1969___22_1_A4_0.

Mac Lane, Saunders [1939], Some recent advances in algebra, *The American Mathematical Monthly*, 46(1), 3–19, doi : 10.2307/2302916.

—— [1971], *Categories for the Working Mathematician*, New York : Springer, 2e éd.

Mancosu, Paolo [1996], *Philosophy of Mathematics & Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, New York : Oxford University Press.

Maronne, Sébastien [2014], Pierre Samuel et Jules Vuillemin, mathématiques et philosophie, dans *Des mathématiques en Auvergne : histoire, progrès, interactions*, édité par Th. Lambre, Clermont-Ferrand : *Revue d'Auvergne*, t. 1, 151–173.

Mélès, Baptiste [à paraître], Des ensembles aux morphismes. Structure et évolution de l'histoire structurale de la philosophie, dans *La Philosophie ventriloque*, édité par V. Debuiche, Presses Universitaires de Provence.

Ore, Øystein [1936], *L'Algèbre abstraite*, Actualités Scientifiques et Industrielles : Exposés d'analyse générale, Paris : Hermann.

Roth, Xavier [2013], *Georges Canguilhem et l'unité de l'expérience. Juger et agir (1926-1939)*, Paris : Vrin.

Samuel, Pierre [1948], On universal mappings and free toplogical groups, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 54, 591–598, doi : 10.1090/S0002-9904-1948-09052-8.

—— [1948 ?], Rédaction n° 041. Rapport sur les applications universelles, http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/450.

—— [1948b], Rédaction n° 109. Algèbre. chapitre V. Corps commutatifs (état 4), http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/items/show/517.

Schwartz, Elisabeth [2015], Le Descartes de Jules Vuillemin et sa contribution à sa *Philosophie de l'algèbre 1*, *Les Études philosophiques*, 112(1), 31–50, doi : 10.3917/leph.151.0031.

Van Damme, Stéphane [2002], *Descartes. Essai d'une histoire culturelle d'une grandeur philosophique*, Paris : Presses de Sciences Po.

van der Waerden, Bartel Leendert [1930], *Moderne Algebra*, Berlin : Springer.

—— [1950], *Modern Algebra*, New York : Ungar, 2 vol.

Vuillemin, Jules [1960*a*], La philosophie de l'algèbre de Lagrange (réflexions sur le mémoire de 1770-1771), *Les Conférences du Palais de la Découverte*, Série D(71), 5–24, conférence faite le 6 février 1960.

—— [1960*b*], *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes*, Epiméthée, Paris : PUF.

—— [1962], *La Philosophie de l'algèbre. Tome premier. Recherches sur quelques concepts et méthodes de l'algèbre moderne*, Épiméthée, Paris : PUF.

—— [1962a], *La Philosophie de l'algèbre [2A]. Deuxième partie. De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres*, inédit, document A : chapitres VI–XII ; Conclusion.

—— [1962b], *La Philosophie de l'algèbre [2B]. Deuxième Partie. Structure, Infini, Ordre*, inédit, document B : Section Première « De quelques structures d'Algèbre et d'Arithmétique et de leur utilisation en Théorie des nombres et en Géométrie et des problèmes philosophiques qui s'y rattachent », Chap. VII–VIII.

—— [1963], *Leçon inaugurale faite le mercredi 5 décembre 1962. Chaire de philosophie de la connaissance*, Paris : Collège de France.

—— [1984], *Nécessité ou contingence. L'aporie de Diodore et les systèmes philosophiques*, Paris : Minuit ; Fondation Singer Polignac.

—— [1986], *What are Philosophical Systems ?*, Cambridge ; London ; New York : Cambridge University Press.

—— [1991], Ma vie en bref, dans *Causality, Method and Modality. Essays in honour of Jules Vuillemin*, édité par Brittan G. G. Jr, Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer, 1–4, doi : 10.1007/978-94-011-3348-7_1.

Weil, André [1980], History of mathematics : Why and how, dans *Proceedings of the International Congress of Mathematicians [1978]*, Helsinki : Acad. Sci. Fennica, 227–236, publié également dans *Œuvres scientifiques*, New York ; Heidelberg, Berlin : Springer, 1980, vol. III, 434–442.

—— [1981], Sur les origines de la géométrie algébrique, *Compositio Mathematica*, 44(1–3), 395–406.